Introducció a l'Econometria
Capítol 2

Ezequiel Uriel Jiménez
Universitat de València

València, 2019

2 El model de regressió lineal simple: estimació i propietats

2.1 Algunes definicions en el model de regressió simple

2.2 Obtenció de les estimacions per *MQO*

2.3 Algunes característiques dels estimadors de *MQO*

2.4 Les unitats de mesura i la forma funcional

2.5 Supòsits i propietats estadístiques dels *MQO*

Exercicis

Annex 2.1 Un cas d'estudi: corbes d'Engel per a la demanda de productes lactis

Apèndixs

2.1 Algunes definicions en el model de regressió simple

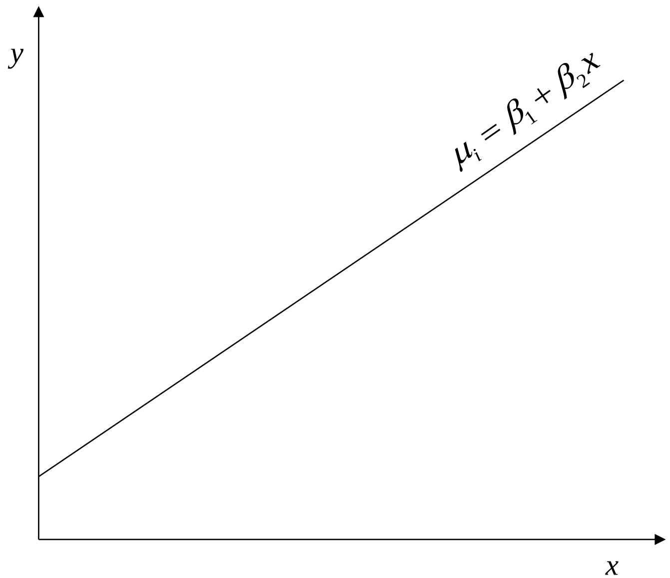


FIGURA 2.1. La funció de regressió poblacional. (*FRP*)

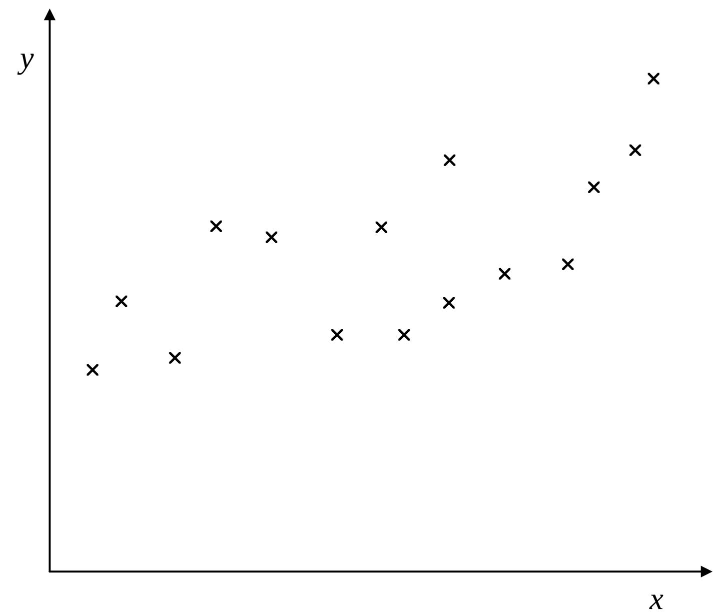


FIGURA 2.2. Diagrama de dispersió.

2.1 Algunes definicions en el model de regressió simple

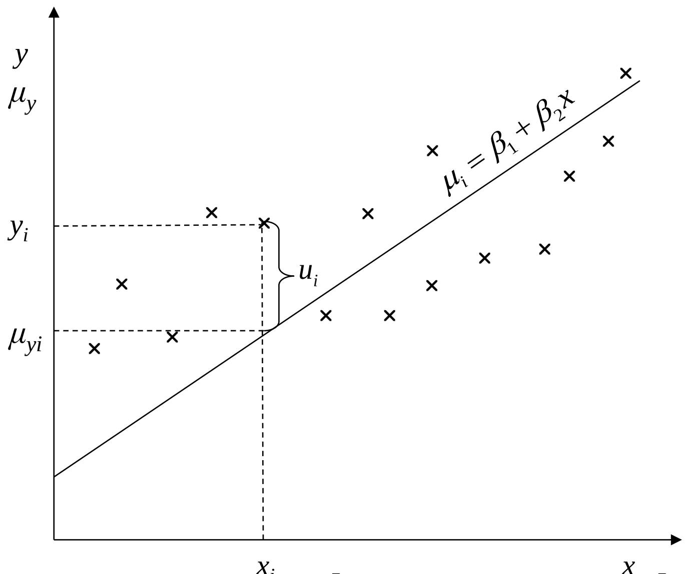


FIGURA 2.3. La función de regressió poblacional i el diagrama de dispersió.

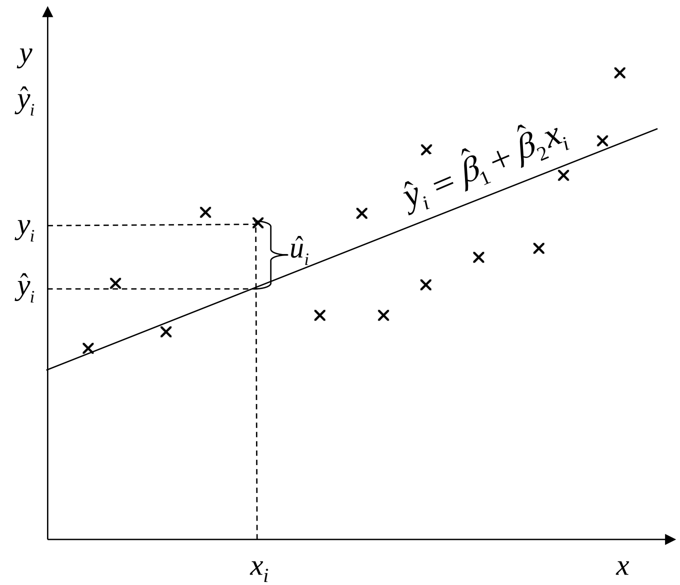


FIGURA 2.4. La función de regressió mostral i el diagrama de dispersió.

2.2 Obtenció de les estimacions per Mínims Quadrats Ordinaris (*MQO*)

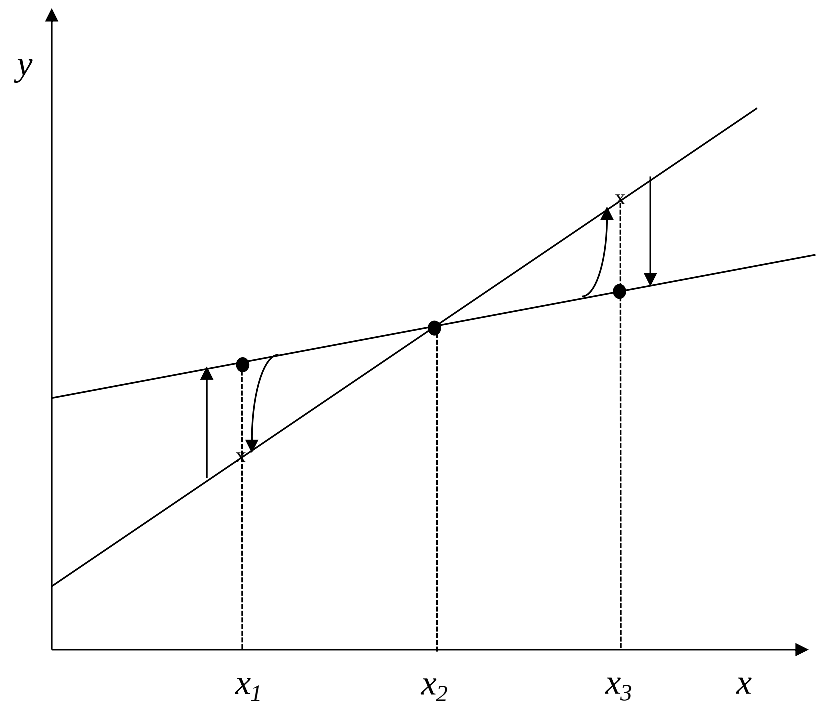


FIGURA 2.5. Els problems del criteri 1.

2.2 Obtenció de les estimacions per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)

EXEMPLE 2.1 L'estimació de la funció de consum

$$cons = \beta_1 + \beta_2 renda + u_i$$

QUADRE 2.1. Dades i càlculs per a estimar la funció de consum.

Observ	$cons_i$	$renda_i$	$cons_i \times renda_i$	$renda_i^2$	$cons_i - \overline{cons}$	$renda_i - \overline{renda}$	$(cons_i - \overline{cons}) \times (renda_i - \overline{renda})$	$(renda_i - \overline{renda})^2$
1	5	6	30	36	-4	-5	20	25
2	7	9	63	81	-2	-2	4	4
3	8	10	80	100	-1	-1	1	1
4	10	12	120	144	1	1	1	1
5	11	13	143	169	2	2	4	4
6	13	16	208	256	4	5	20	25
Suma	**54**	**66**	**644**	**786**	**0**	**0**	**50**	**60**

$$\overline{cons} = \frac{54}{6} = 9 \qquad \overline{inc} = \frac{66}{6} = 11 \qquad (2\text{-}17): \hat{\beta}_2 = \frac{644 - 9\times 66}{786 - 11\times 66} = 0.8\widehat{3}$$

$$(2\text{-}18): \hat{\beta}_2 = \frac{50}{60} = 0.8\widehat{3} \qquad \hat{\beta}_1 = 9 - 0.8\widehat{3}\times 11 = -0.1\widehat{6}$$

2.3 Algunes característiques dels estimadors de *MQO*

EXEMPLE 2.2 Compliment de les propietats algebraiques i R^2 a la funció de consum

$$SQT = 42 \qquad SCE = 41.67 \qquad SRC = 42 - 41.67 = 0.33 \qquad R^2 = \frac{41.67}{42} = 0.992$$

O, alternativament,

$$R^2 = 1 - \frac{0.33}{42} = 0.992$$

QUADRE 2.2. DADES I CÀLCULS PER A ESTIMAR LA FUNCIÓ DE CONSUM.

Observ	$cons_i$	$\hat{u}_i$	$\hat{u}_i \times renda_i$	$cons_i \times \hat{u}_i$	$cons_i^2$	$(cons_i - \overline{cons})^2$	$\widehat{cons}_i^2$	$(\widehat{cons}_i - \overline{cons})^2$
1	4.83	0.17	1.00	0.81	25	16	23.36	17.36
2	7.33	-0.33	-3.00	-2.44	49	4	53.78	2.78
3	8.17	-0.17	-1.67	-1.36	64	1	66.69	0.69
4	9.83	0.17	2.00	1.64	100	1	96.69	0.69
5	10.67	0.33	4.33	3.56	121	4	113.78	2.78
6	13.17	-0.17	-2.67	-2.19	169	16	173.36	17.36
	54.00	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**528**	**42**	**527.67**	**41.67**

2.3 Algunes característiques dels estimadors de *MQO*

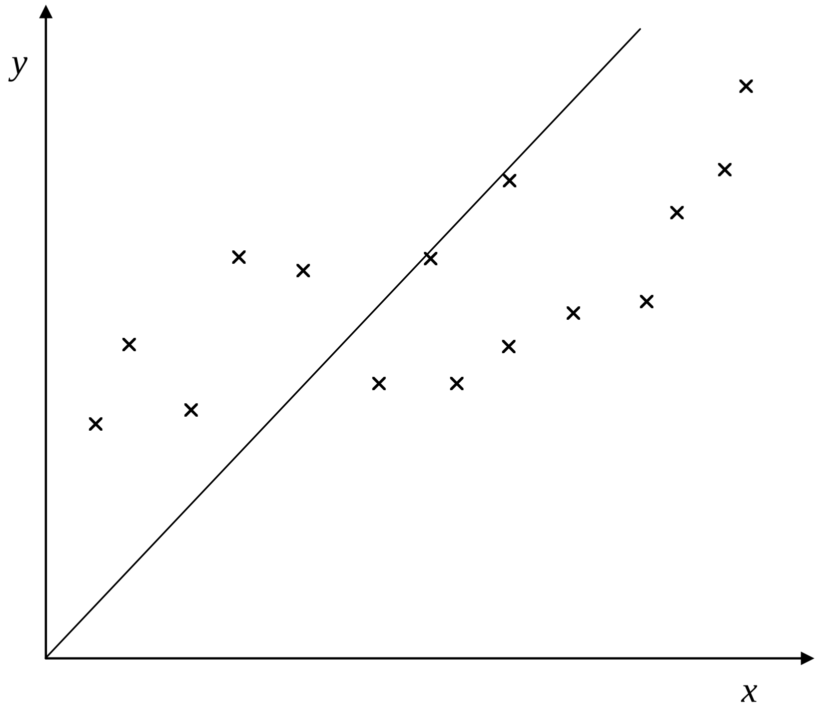


FIGURA 2.6. Una regressió a través de l'origen.

2.4 Les unitats de mesura i la forma funcional

EXEMPLE 2.3

$$(2\text{-}39): cons_i = 0.2 + 0.85 \times renda_i$$

$$rendae = renda \times 1000$$

$$cons_i = 0.2 + 0.00085 \times rendae_i$$

EXEMPLE 2.4

$$conse = cons \times 1000$$

$$conse_i = 200 + 850 \times renda_i$$

2.4 Les unitats de mesura i la forma funcional

EXEMPLE 2.5

$$\overline{renda} = 20 \qquad rendad_i = renda_i - \overline{renda}$$

$$cons_i = (0.2 + 0.85 \times 20) + 0.85 \times (renda_i - 20) = 17.2 + 0.85 \times rendad_i$$

EXEMPLE 2.6

$$\overline{cons} = 15 \qquad consd_i = cons_i - \overline{cons}$$

$$cons_i - 15 = 0.2 - 15 + 0.85 \times renda_i$$

$$consd_i = -14.8 + 0.85 \times renda_i$$

QUADRE 2.3. EXEMPLES DE CANVIS PROPORCIONALS I CANVIS EN LOGARITMES.

x_1	202	210	220	240	300
x_0	200	200	200	200	200
Canvi proporcional en %	1%	5.0%	10.0%	20.0%	50.0%
Canvi en logaritmes en %	1%	4.9%	9.5%	18.2%	40.5%

EXEMPLE 2.7 Quantitat de cafè venut com una funció del seu preu. Model lineal (fitxer *coffee1*)

$$coffqty = \beta_1 + \beta_2 coffpric + u$$

$$coffqty = 774.9 - 693.33 coffpric \quad R^2 = 0.95 \quad n = 12$$

QUADRE 2.4. DADES SOBRE QUANTITATS I PREUS DEL CAFÈ.

setmana	*coffpric*	*coffqty*
1	1.00	89
2	1.00	86
3	1.00	74
4	1.00	79
5	1.00	68
6	1.00	84
7	0.95	139
8	0.95	122
9	0.95	102
10	0.85	186
11	0.85	179

EXEMPLE 2.8 Explicant el valor de mercat dels bancs espanyols. Model lineal (fitxer *bolmad95*)

$$marktval = 29.42 + 1.219 bookval$$
$$R^2 = 0.836 \quad n = 20$$

EXEMPLE 2.9 Quantitat de cafè venut en funció del seu preu. Model doblement logarítmic (continuació de l'exemple 2.7) (fitxer *coffee1*)

$$\ln(coffqty) = 4.415 - 5.132 \ln(coffpric)$$
$$R^2 = 0.90 \quad n = 12$$

EXEMPLE 2.10 Explicant el valor de mercat dels bancs espanyols. Model doblement logarítmic (continuació de l'exemple 2.8) (fitxer *bolmad95*)

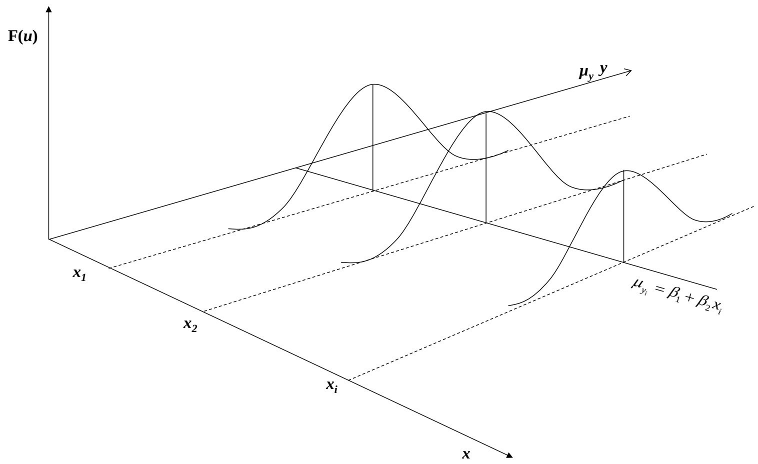
$$\ln(marktval) = 0.6756 + 0.938\ln(bookval)$$

$$R^2 = 0.928 \qquad n = 20$$

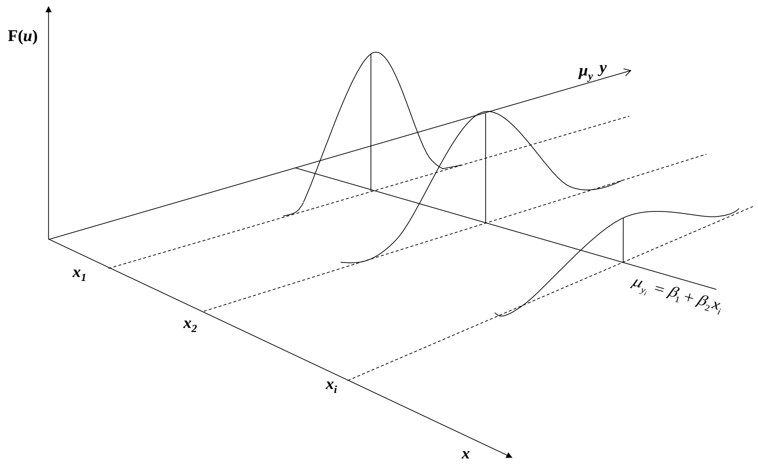
QUADRE 2.5. Interpretació de $\hat{\beta}_2$ en els diferents models.

Model	Si x augmenta en	aleshores y s'incrementarà en
lineal	1 unitat	$\hat{\beta}_2$ unitats
lineal logarítmic	1%	$(\hat{\beta}_2/100)$ unitats
logarítmic lineal	1 unitat	$(100\hat{\beta}_2)\%$
doblement logarítmic	1%	$\hat{\beta}_2\%$

2.5 Supòsits i propietats estadístiques dels *MQO*



a)



b)

FIGURA 2. 7. Pertorbacions aleatòries:
a) homoscedasticitat; b) heteroscedasticitat.

2.5 Supòsits i propietats estadístiques dels *MQO*

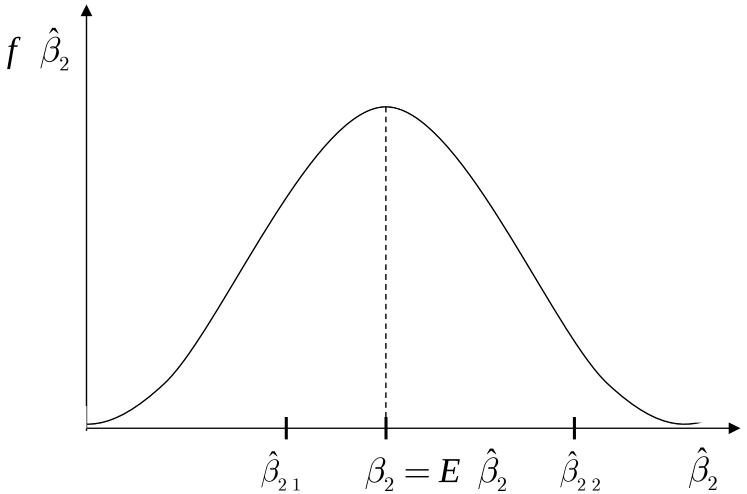


FIGURA 2.8. Estimador no esbiaixat.

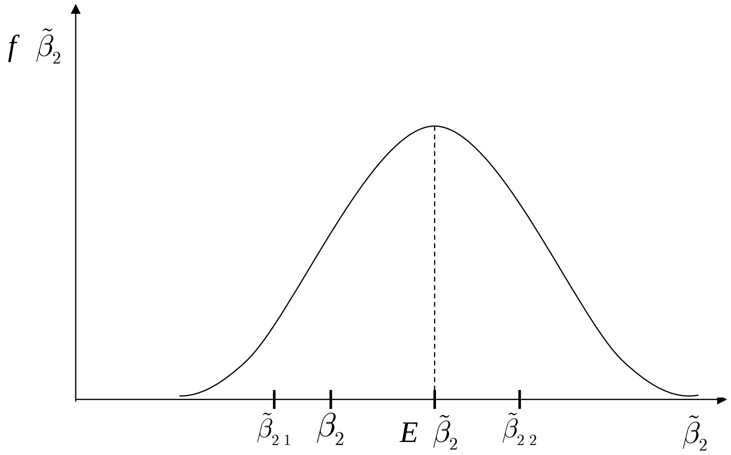


FIGURA 2.9. Estimador esbiaixat.

2.5 Supòsits i propietats estadístiques dels MQO

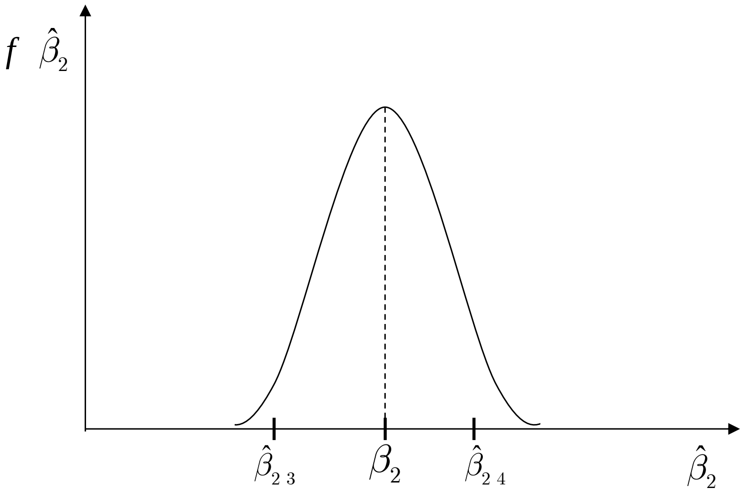


FIGURA 2.10. Estimador amb variança xicoteta

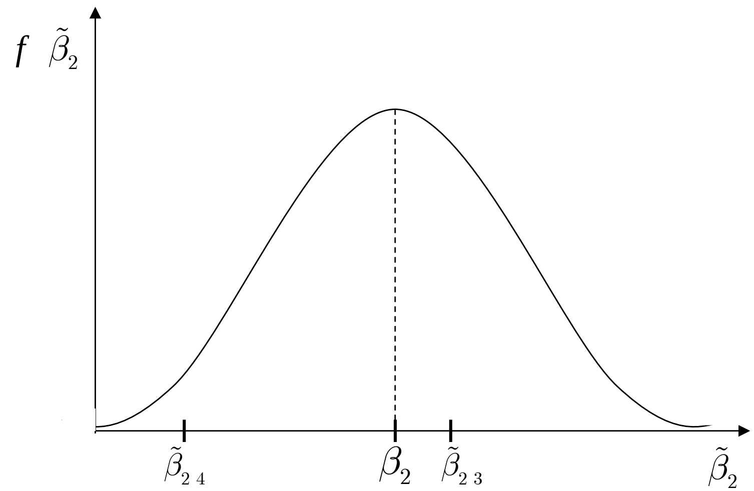


FIGURA 2.11. Estimador amb variança gran.

2.5 Supòsits i propietats estadístiques dels *MQO*

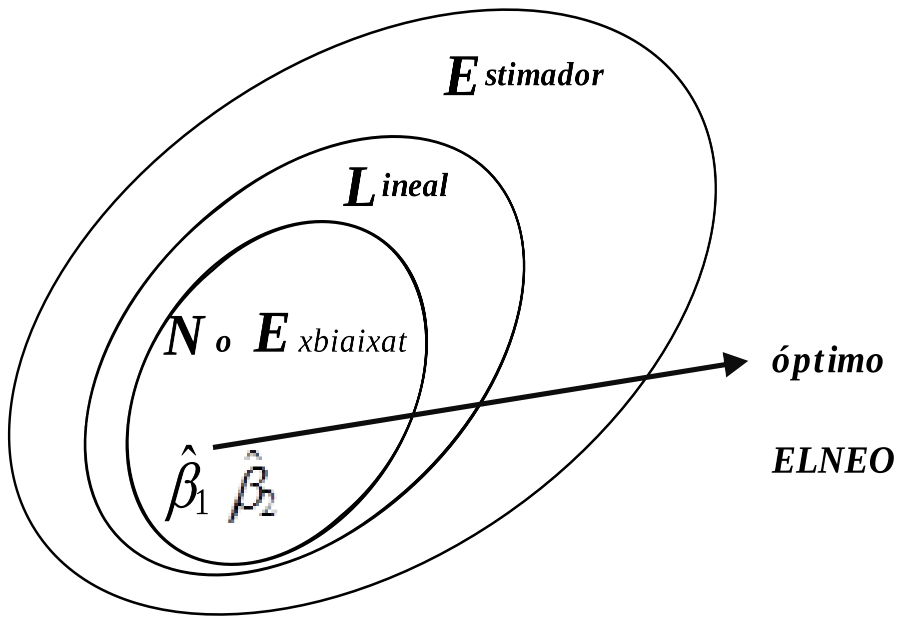


FIGURA 2.12. Els estimadors *MQO* són *ELNEO*.

2.5 Supòsits i propietats estadístiques dels *MQO*

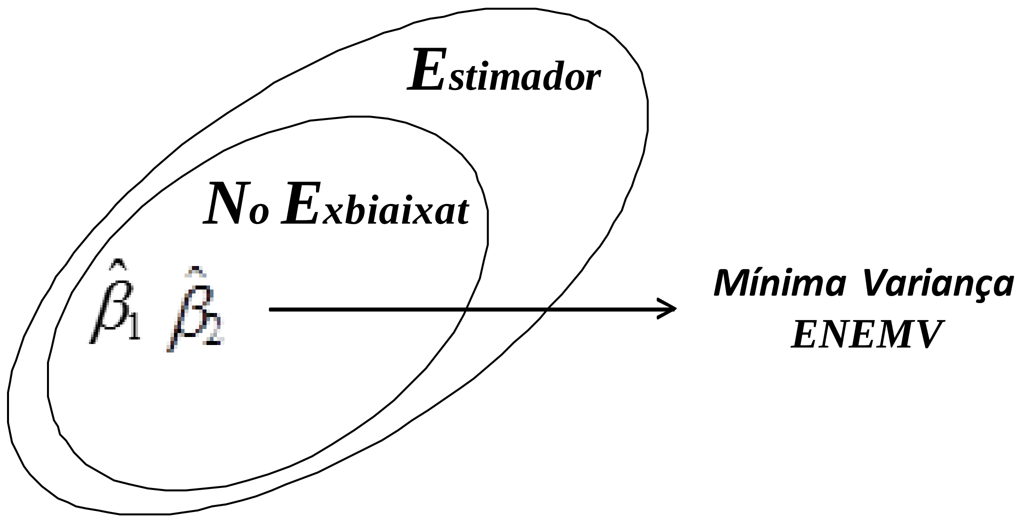


FIGURA 2.13. Los estimadores *MCO* són *ENEMV*.

Annex 2.1 Un cas d'estudi: corbes d'Engel per a la demanda de productes lactis (fitxer demand)

QUADRE 2.6 Despesa en productes lactis (*dairy*), renda disponible (*inc*) en termes per càpita. (Unitat: euros per mes). *n*=40

familia	*dairy*	*inc*	*familia*	*dairy*	*inc*
1	8.87	1.25	21	16.2	2.1
2	6.59	985	22	10.39	1.47
3	11.46	2.175	23	13.5	1.225
4	15.07	1.025	24	8.5	1.38
5	15.6	1.69	25	19.77	2.45
6	6.71	670	26	9.69	910
7	10.02	1.6	27	7.9	690
8	7.41	940	28	10.15	1.45
9	11.52	1.73	29	13.82	2.275
10	7.47	640	30	13.74	1.62
11	6.73	860	31	4.91	740
12	8.05	960	32	20.99	1.125
13	11.03	1.575	33	20.06	1.335
14	10.11	1.23	34	18.93	2.875
15	18.65	2.19	35	13.19	1.68
16	10.3	1.58	36	5.86	870
17	15.3	2.3	37	7.43	1.62
18	13.75	1.72	38	7.15	960
19	11.49	850	39	9.1	1.125
20	6.69	780	40	15.31	1.875

Annex 2.1 Un cas d'estudi: corbes d'Engel per a la demanda de productes lactis

Model lineal

$$dairy = \beta_1 + \beta_2 inc + u$$

$$\frac{d\ dairy}{d\ inc} = \beta_2$$

$$\varepsilon_{dairy/inc}^{linear} = \frac{d\ dairy}{d\ inc}\frac{inc}{dairy} = \beta_2 \frac{inc}{dairy}$$

$$dairy = 4.012 + 0.005288 \times inc \qquad R^2 = 0.4584$$

Annex 2.1 Un cas d'estudi: corbes d'Engel per a la demanda de productes lactis

Model invers

$$dairy = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{inc} + u$$

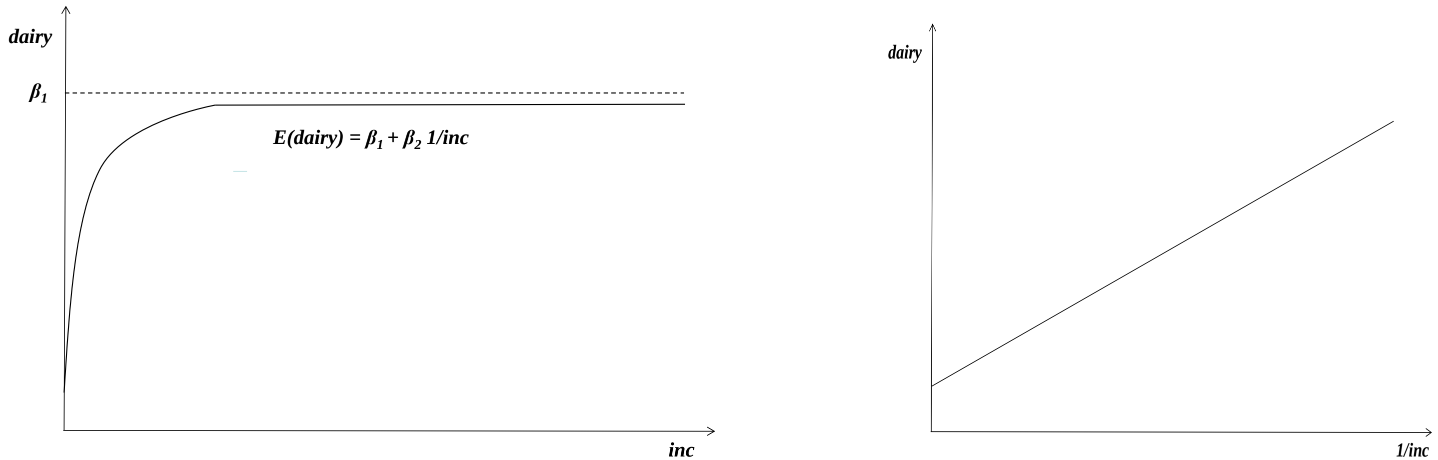


FIGURA 2.14. El model invers.

$$\frac{d\ dairy}{d\ inc} = -\beta_2 \frac{1}{(inc)^2}$$

$$\varepsilon^{inv}_{dairy/inc} = \frac{d\ dairy}{d\ inc}\frac{inc}{dairy} = -\beta_2 \frac{1}{inc \times dairy}$$

$$dairy = 18.652 - 8702\frac{1}{inc} \qquad R^2 = 0.4281$$

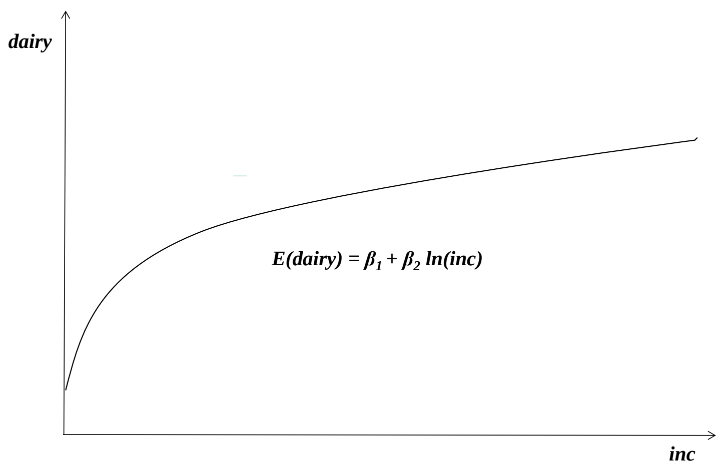
Annex 2.1 Un cas d'estudi: corbes d'Engel per a la demanda de productes lactis

Model lineal logarítmic

$$dairy = \beta_1 + \beta_2 \ln(inc) + u$$

$$\frac{d\ dairy}{d\ inc} = \frac{d\ dairy}{d\ inc}\frac{inc}{inc} = \frac{d\ dairy}{d\ln(inc)}\frac{1}{inc} = \beta_2 \frac{1}{inc}$$

$$\varepsilon_{dairy/inc}^{lin\text{-}\log} = \frac{d\ dairy}{d\ inc}\frac{inc}{dairy} = \frac{d\ dairy}{d\ \ln(inc)}\frac{1}{dairy} = \beta_2 \frac{1}{dairy}$$



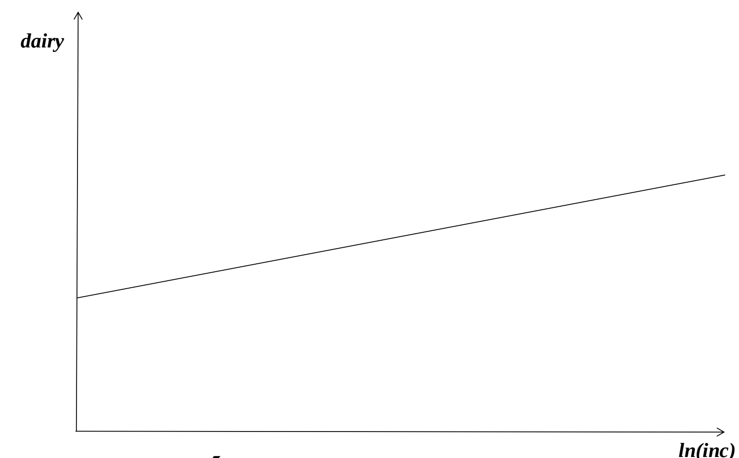


FIGURA 2.15. El model lineal logarítmic.

$$dairy = -41.623 + 7.399 \times \ln(inc) \qquad R^2 = 0.4567$$

Annex 2.1 Un cas d'estudi: corbes d'Engel per a la demanda de productes lactis

Model potencial o doblement logarítmic

$$dairy = e^{\beta_1} inc^{\beta_2} e^{u}$$

$$\ln(dairy) = \beta_1 + \beta_2 \ln(inc) + u$$

$$\frac{d\ dairy}{d\ inc} = \beta_2 \frac{dairy}{inc}$$

$$\varepsilon_{dairy/inc}^{log\text{-}log} = \frac{d\ dairy}{d\ inc}\frac{inc}{dairy} = \frac{d\ \ln(dairy)}{d\ \ln(inc)} = \beta_2$$

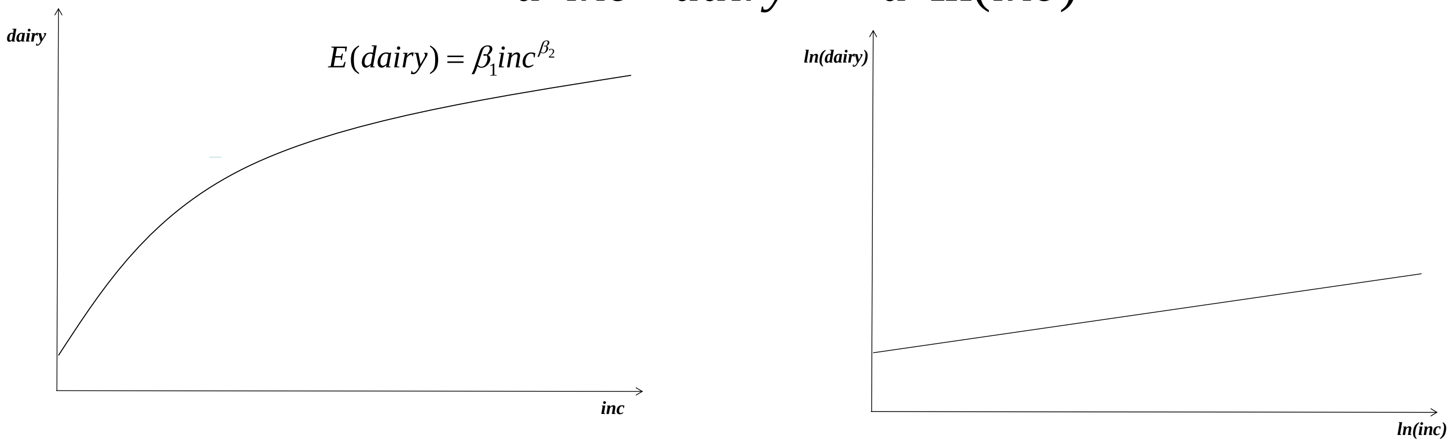


FIGURA 2.16. Model doblement logarítmic.

$$\ln(dairy) = -2.556 + 0.6866 \times \ln(inc) \qquad R^2 = 0.5190$$

Annex 2.1 Un cas d'estudi: corbes d'Engel per a la demanda de productes lactis

Model exponencial

$$dairy = \exp(\beta_1 + \beta_2 inc + u)$$

$$\ln(dairy) = \beta_1 + \beta_2 inc + u$$

$$\frac{d\ dairy}{d\ inc} = \beta_2 dairy$$

$$\varepsilon^{exp}_{dairy/inc} = \frac{d\ dairy}{d\ inc}\frac{inc}{dairy} = \frac{d\ \ln(dairy)}{d\ inc} inc = \beta_2 inc$$

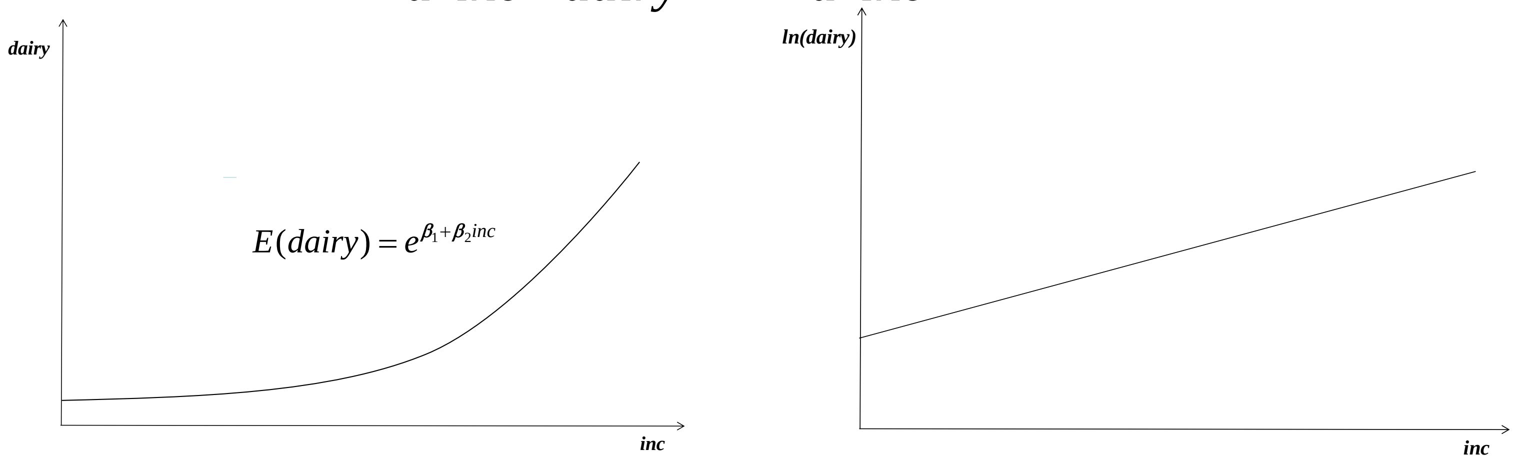


FIGURA 2.17. El model exponencial.

$$\ln(dairy) = 1.694 + 0.00048 \times inc \quad R^2 = 0.4978$$

Annex 2.1 Un cas d'estudi: corbes d'Engel per a la demanda de productes lactis

Model exponencial invers

$$dairy = \exp(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{inc} + u)$$

$$\ln(dairy) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{inc} + u$$

$$\frac{d\ dairy}{d\ inc} = -\beta_2 \frac{dairy}{(inc)^2}$$

$$\varepsilon_{dairy/inc}^{invexp} = \frac{d\ dairy}{d\ inc}\frac{inc}{dairy} = \frac{d\ \ln(dairy)}{d\ inc} inc = -\beta_2 \frac{1}{inc}$$

$$\ln(dairy) = 3.049 - 822.02 \frac{1}{inc} \qquad R^2 = 0.5040$$

Annex 2.1 Un cas d'estudi: corbes d'Engel per a la demanda de productes lactis

QUADRE 2.7. Propensió marginal, elasticitat despesa/renda i R^2 als models estimats per a analitzar la demanda de products lactis.

Model	*Propensió marginal*	*Elasticitat*	R^2
Lineal	$\hat{\beta}_2 = 0{,}0053$	$\hat{\beta}_2 \frac{\overline{inc}}{\overline{dairy}} = 0{,}6505$	0,444
Inverse	$-\hat{\beta}_2 \frac{1}{[\overline{inc}]^2}$ 0,0044	$-\hat{\beta}_2 \frac{1}{\overline{dairy}\,\overline{inc}}$ 0,5361	0,4279
Linear-log	$\hat{\beta}_2 \frac{1}{\overline{inc}} = 0{,}0052$	$\hat{\beta}_2 \frac{1}{\overline{dairy}} = 0{,}6441$	0,4566
Log-log	$\hat{\beta}_2 \frac{\overline{dairy}}{\overline{inc}} = 0{,}0056$	$\hat{\beta}_2 = 0{,}6864$	0,5188
Log-lineal	$\hat{\beta}_2 \overline{dairy}$ 0,0055	$\hat{\beta}_2 \overline{inc}$ 0,6783	0,4976
Inverse-log	$-\hat{\beta}_2 \frac{\overline{dairy}}{[\overline{inc}]^2}$ 0,0047	$-\hat{\beta}_2 \frac{1}{\overline{inc}}$ 0,5815	0,5038